1. a) ¿Cuáles son las longitudes de onda posibles de las ondas estacionarias producidas en una cuerda tensa, de longitud L, sujeta por ambos extremos? Razone la respuesta.
b) ¿En qué lugares de la cuerda se encuentran los puntos de amplitud máxima? ¿Y los de amplitud nula? Razone la respuesta.

2. Por una cuerda se propaga un movimiento ondulatorio caracterizado por la función de onda:

$$y = A \text{ sen } 2\pi\,(x/\lambda - t/T)$$

Razone a qué distancia se encuentran dos puntos de esa cuerda si:
a) La diferencia de fase entre ellos es de π radianes.
b) Alcanzan la máxima elongación con un retardo de un cuarto de periodo.

3. a) ¿Qué es una onda armónica o sinusoidal? ¿De cuáles de sus características depende la energía que transporta?
b) ¿Qué diferencias existen entre el movimiento de una onda a través de un medio y el movimiento de las partículas del propio medio?

4. Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: $a = -16\,\pi^2 x$.
a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm.
b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio.

5. Por una cuerda tensa, colocada a lo largo del eje X, se propaga un movimiento ondulatorio transversal cuya función de onda es:

$$y = 0{,}15 \text{ sen } (4\pi\, x + 400\pi\, t) \quad \text{(S.I.)}$$

a) Represente gráficamente la forma de la onda en el instante inicial y un cuarto de periodo después.
b) Determine la elongación y la velocidad de un punto de la cuerda situado en la posición x = 0,5 m, en el instante t = 0,01 s.

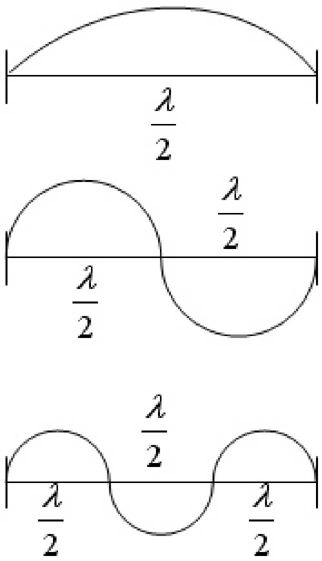
6. Un tabique móvil ha provocado, en la superficie del agua de un estanque un movimiento ondulatorio caracterizado por la función:

$$y = 0{,}04 \text{ sen } (10\pi x - 4\pi t + \pi/2) \quad \text{(S. I.)}$$

Suponiendo que los frentes de onda producidos se propagan sin pérdida de energía, determine:
a) El tiempo que tarda en ser alcanzado por el movimiento un punto situado a una distancia de 3 m del tabique.
b) La elongación y la velocidad, en dicho punto, 0,5 s después de haberse iniciado el movimiento.

1. –

a) Como los extremos fijos constituyen nodos



$$l = \lambda/2$$

$$l = 2 \cdot \lambda/2$$

$$l = 3 \cdot \lambda/2$$

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot l}{n}$$

b) Vientres (A' máxima), como $A' = 2 \cdot A \cdot sen\left(K \cdot x\right)$ esto implica que $sen\left(K \cdot x\right) = 1$ por lo tanto el ángulo $K \cdot x$ tomará los siguientes valores

$$K \cdot x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{2} \end{cases} \quad \text{como} \quad K = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \begin{cases} x \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} & x = \frac{\lambda}{4} \\ x \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{3\pi}{2} & x = 3 \cdot \frac{\lambda}{4} \\ x \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{5\pi}{2} & x = 5 \cdot \frac{\lambda}{4} \end{cases}$$

con lo cual nos queda que $x = \left(2n+1\right)\frac{\lambda}{4}$ siendo n = 0, 1, 2,…

Nodos A' = 0 esto implica que $sen\left(K \cdot x\right) = 0$ y $K \cdot x$ tomará los siguientes valores

$$K \cdot x = \begin{cases} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{cases} \quad \text{como} \quad K = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \begin{cases} & x = 0 \\ x \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \pi & x = \frac{\lambda}{2} \\ x \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi & x = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

con lo cual nos queda que $x = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ siendo n = 0, 1, 2,…

2. – $$y = A \cdot sen\, 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

a) Tenemos que calcular $x_2 - x_1$ para una diferencia de fase $\delta = \pi \ \ rad$

$$y_1 = A \cdot sen\, 2\pi \left(\frac{x_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \qquad y_2 = A \cdot sen\, 2\pi \left(\frac{x_2}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

$$\delta = 2\pi \left(\frac{x_2}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - 2\pi \left(\frac{x_2}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) = \pi \qquad \frac{2\pi}{\lambda} \left(x_2 - x_1 \right) = \pi \quad \text{despejando}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{2}$$

b) En los puntos en que la elongación es máxima se cumple $y_{max} = A$ y esto implica que $sen \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] = 1$ por lo tanto, los ángulos han de ser iguales

$$2\pi \left(\frac{x_1}{\lambda} - \frac{t_1}{T} \right) = 2\pi \left(\frac{x_2}{\lambda} - \frac{t_1 + T/4}{T} \right) \qquad \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = \frac{t_1 + T/4}{T} - \frac{t_1}{T} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{4}$$

3. –

a) Existe un tipo muy importante de ondas que se denominan “armónicas”, las caracteriza que la función de onda que las describe es una función sinusoidal de x, que es la dirección de propagación y del tiempo t:

$$y(x,t) = A \cdot sen\, K \left(x \pm v \cdot t \right)$$

La perturbación que se propaga en forma de onda armónica es producida por un oscilador armónico (M. A. S.).

La energía (ΔE) correspondiente a un segmento de cuerda por la que se desplaza una onda armónica de longitud Δx con una densidad lineal μ viene dada por la ecuación

$$\Delta E = 2 \cdot \mu \cdot \Delta x \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot A^2$$

por lo tanto la energía transmitida por una onda armónica es directamente proporcional al cuadrado de la frecuencia y al cuadrado de la amplitud.

b) El movimiento de propagación de una onda por un medio es uniforme, el frente de onda se propaga con velocidad constante.

Las partículas de un medio por el que se propaga una onda armónica tienen un movimiento vibratorio armónico simple y cada una de ellas tiene un desfase con la anterior.

4. - m = 0,05 Kg A = 0,1 m a = $-16\pi^2 \cdot x$

a) Como para t = 0 la elongación x = A la ecuación del M. A. S. es del tipo

$x = A \cdot \cos \omega \cdot t$ como $a = -\omega^2 \cdot x$ sustituyendo $-16\pi^2 \cdot x = -\omega^2 \cdot x$ de donde

$\omega = 4\pi \ rad/s$ por lo tanto la ecuación queda $x = 0{,}1 \cdot \cos 4\pi t \ m$

para la expresión de la velocidad $v = \dfrac{dx}{dt} = -0{,}1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot sen\, 4\pi t$

$v = -0{,}4 \cdot \pi \cdot sen 4\pi t \quad \dfrac{m}{s}$

b) Para calcular la energía cinética, calculamos primero la velocidad del móvil cuando su elongación sean 5 cm x = 0,05 m

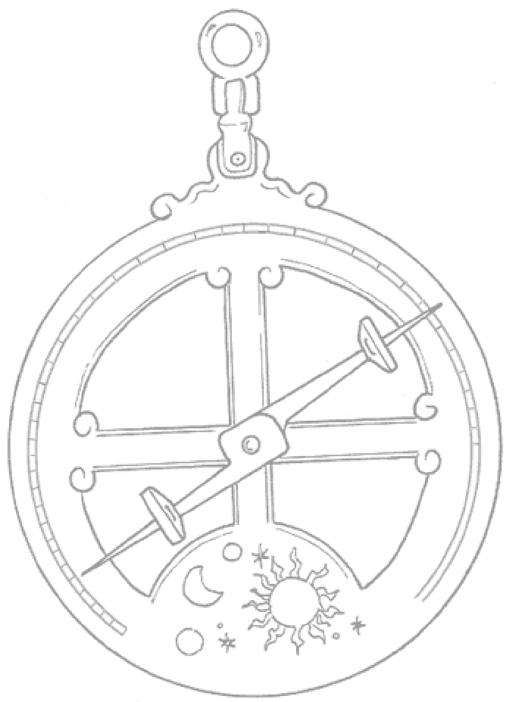
$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} \qquad v^2 = \omega^2 \cdot \left(A^2 - x^2\right) = 16 \cdot \pi^2 \cdot \left(0{,}1^2 - 0{,}05^2\right) = 1{,}18 \ \frac{m^2}{s^2}$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}05\, Kg \cdot 1{,}18 \frac{m^2}{s^2} = 0{,}03\, J$$

para calcular la energía potencial, calculamos primero la constante elástica del oscilador

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \qquad K = \omega^2 \cdot m = 16 \cdot \pi^2 \ s^{-2} \cdot 0{,}05\, Kg = 7{,}9 \frac{N}{m}$$

$$E_P = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 7{,}9 \frac{N}{m} \cdot \left(0{,}05\right)^2 m^2 = 0{,}01\, J$$



5. –

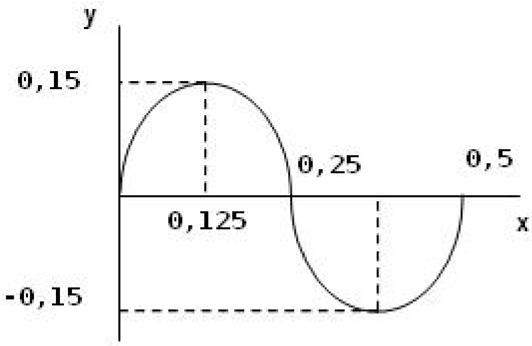
a) $y = 0{,}15 \cdot sen\left(4 \cdot \pi \cdot x + 400 \cdot \pi \cdot t\right)$ comparando con la ecuación general $y = A \cdot sen\left(K \cdot x \pm \omega \cdot t\right)$ obtenemos que A = 0,15 m K = 4π m^{-1} $\omega = 400\pi$ rad/s

sustituyendo estos valores en las expresiones de la longitud de onda y del periodo

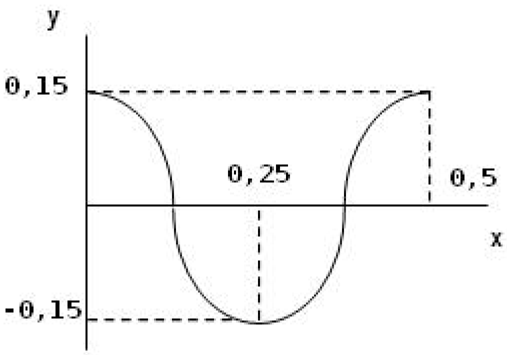
$$\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0{,}5\,m \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{400\pi} = 5 \cdot 10^{-3}\,s$$

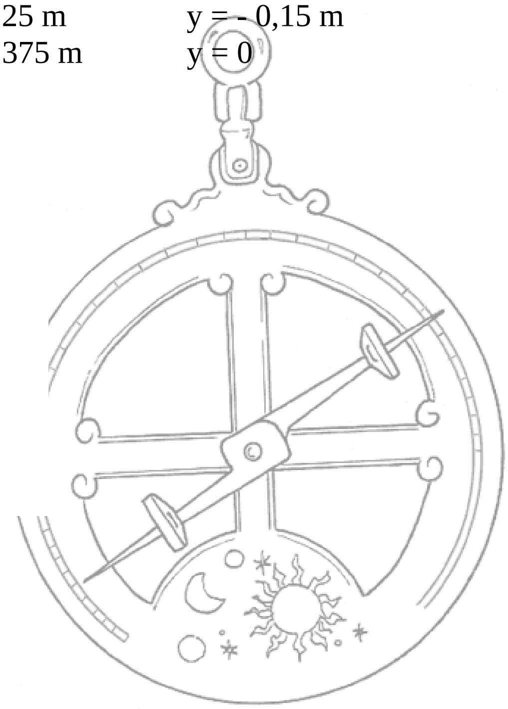
para hacer la gráfica en el instante inicial t = 0, le damos a x valores desde 0, cada $\frac{\lambda}{4}$

para t = 0
- x = 0 y = 0
- x = 0,125 m y = 0,15 m
- x = 0,25 m y = 0
- x = 0,375 m y = - 0,15 m



para t = T/4 = 1,25 · 10^{-3} s
- x = 0 y = 0,15 m
- x = 0,125 m y = 0
- x = 0,25 m y = - 0,15 m
- x = 0,375 m y = 0





5. –

b) $y = 0{,}15 \cdot sen\left(4 \cdot \pi \cdot x + 400 \cdot \pi \cdot t\right)$ hay que calcular la elongación (y) y la velocidad de un punto de la cuerda (v), para x = 0,5 m y t = 0,01 s

$$y = 0{,}15 \cdot sen\left(2\pi + 4\pi\right) = 0$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -0{,}15 \cdot 400 \cdot \pi \cdot \cos\left(4 \cdot \pi \cdot x + 400 \cdot \pi \cdot t\right) = -0{,}15 \cdot 400 \cdot \pi \cdot \cos\left(2\pi + 4\pi\right)$$

$$v = -188{,}5\frac{m}{s}$$

que se corresponde con la velocidad máxima $v_{\max} = -A \cdot \omega$ ya que el cos(6π) = 1

6. - $y = 0{,}04 \cdot sen\left(10 \cdot \pi \cdot x - 4 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$ S. I.

a) K = 10π m^{-1} ω = 4π s^{-1}

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0{,}2\,m \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2\,s^{-1}$$

$v_{PROP} = \lambda \cdot f = 0{,}2\,m \cdot 2\,s^{-1} = 0{,}4\frac{m}{s}$ como el movimiento de propagación es uniforme $x = v \cdot t$ $t = \frac{x}{v} = \frac{3m}{0{,}4\,m \cdot s^{-1}} = 7{,}5\,s$

b) Hay que calcular la elongación (y) y la velocidad de un punto de la superficie del agua, para x = 3 m y t = 0,5 s

$$y = 0{,}04 \cdot sen\left(30 \cdot \pi - 2 \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}04\,m$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -0{,}04 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \cos\left(10 \cdot \pi \cdot x - 4 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}04 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \cos\left(30 \cdot \pi - 2 \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v = 0$$